| | | |
|---|---|---|
| جامعة البعث | امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018 | المدة: ساعة ونصف |
| كلية العلوم | اسئلة مقرر البنى الجبرية (2) | العلامة: 100 درجة |
| قسم الرياضيات | سنة ثانية رياضيات | الاسم: |

---

**السؤال الأول (39 درجة):**

**أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:**

(1) إن الحلقة $R = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ هي حقل بالنسبة للجمع والضرب بالمقاس 15.

(2) إن حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ فوق حلقة الأعداد الصحيحة $Z$ تحقق خاصة الاختصار.

(3) مميز حلقة الخارج $Z_{12}/3Z_{12}$ يساوي 12

(4) إن $4Z/8Z$ مثالية في حلقة الخارج $2Z/8Z$.

(5) إن الحلقة $R = Z \oplus Z$ هي حلقة تامة لأن $Z$ حلقة تامة

(6) إن $3+6Z_{12}$ هو عنصر جامد في الحلقة $Z_{12}/6Z_{12}$.

(7) إن المثالية $<4>$ أولية في الحلقة $Z_{12}$.

(8) إن المثالية $(3Z + 5Z)$ أعظمية في حلقة الأعداد الصحيحة $Z$.

(9) إن الحلقة $(Z_{90}, +, .)$ حلقة موضعية.

(10) إذا كانت $A = 2Z$ , $B = 6Z$ مثاليتين في $Z$، فإن $A : B = 3Z$

(11) إذا كانت $R = Z_{90}$ فإن $J(R) = <6>$

(12) إذا كانت $A = <6>$ مثالية في حلقة الأعداد الصحيحة $Z$ فإن $rad\ A = <3>$

(13) إن الحدودية $2x + 1 \in Z_4[x]$ هي حدودية أولية فوق $Z_4$.

**السؤال الثاني (45 درجة):** اثبت صحة ما يلي: لتكن $R$ حلقة واحدية و $A$ , $B$ مثاليتين في $R$.

(1) إن مركز الحلقة $R$ $\quad Z(R) = \{x : x \in R ; ax = xa, \forall a \in R\}$ هو حلقة جزئية واحدية في $R$.

(2) إذا كانت $R$ تبديلية والمثاليتان $A, B$ تحققان $R = A+B$ فإن $A . B = A \cap B$.

(3) إذا كانت $R$ تبديلية فإن $rad\ R \subseteq J(R)$ حيث $J(R)$ هو أساس جاكبسون في $R$.

(4) كل مثالية يسارية $A$ عديمة القوى في الحلقة $R$ لاتحوي عناصر جامدة مغايرة للصفر.

(5) إن أساس جاكبسون $J(R)$ يكون مثالية يسارية صغيرة في $R$ وهي أكبر مثالية يسارية صغيرة في الحلقة $R$.

**السؤال الثالث (16 درجة):** إذا كانت $R$ حلقة تبديلية و $A$ , $B$ مثاليتين في $R$ وكان $rad\ A = \sqrt{A} = \{a : a \in R ;\ \exists\ n \in Z^+ ;\ a^n \in A\}$. **اثبت صحة ما يلي:**

(1) $rad\ A$ مثالية في $R$.

(2) إذا كانت $A$ أولية فإن $rad\ A = A$.

(3) إذا كانت $A = <3>$ , $B = <5>$ , $C = <6>$ ثلاث مثاليات في $Z$، أوجد :

rad (AC + A∩B)

---

| | |
|---|---|
| 2018 - 1 - 16 | مع أطيب التمنيات بالنجاح |
| | د. إيمان الخوجة |

/ /      2018 فصل أول

1) إن الحلقة $R = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ هي حقل بالنسبة للجمع والضرب بالمقياس 15. صح لأن.

شرط الواحدية $a.1 = a$

| mod 15 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 9 | 3 | 12 | 6 |
| 6 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| 9 | 0 | 12 | 9 | 6 | 3 |
| 12 | 0 | 6 | 12 | 3 | 9 |

نلاحظ من الجدول أن R واحدية

وواحدها هو 6

وهي تبديلية

وهي تامة لأنه لا يوجد $a \neq 0$

$a.b = 0$ بحيث $b \neq 0$

أي لا تحوي قواسم للصفر

⇐ تامة

وهي منطقة تكاملية منتهية ⇐ هي حقل

2) إن حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ فوق حلقة الأعداد الصحيحة Z تحقق خاصية الاختصار، خطأ لأن

خاصية الاختصار تتحقق في المناطق التكاملية و $M_2(Z)$ تحوي قواسم للصفر وبالتالي ليست تامة وبالتالي ليست منطقة تكاملية ⇐ لا تحقق خاصية الاختصار

$$\{M_2(Z) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \neq 0 \in Z\} \text{ مثلاً } \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) مميز حلقة الخارج $\frac{Z_{12}}{3Z_{12}}$ يساوي 12. صح لأن

$Z_{12} = \{0, \dots, 11\}$

$\frac{Z_{12}}{3Z_{12}} = \{0 + 3Z_{12}, 1 + 3Z_{12}, \dots, 11 + 3Z_{12}\}$

نوجد الواحد وهو $1 + 3Z_{12}$

شرط المميز $n.1 = 0 ; n \neq 0$

$1.1 + 3Z_{12} = 1 + 3Z_{12}$    $2.1 + 3Z_{12} = 2 + 3Z_{12}$

$\dots\dots 12.1 + 3Z_{12} = 12 \bmod 12 + 3Z_{12} = 0 + 3Z_{12}$

⇐ المميز هو 12

/ /

4) إن $\frac{4Z}{8Z}$ مثالية في حلقة الخارج $\frac{2Z}{8Z}$ صح لأن

حتى تكون $\frac{4Z}{8Z}$ مثالية في $\frac{2Z}{8Z}$ يجب أن يتحقق شرطين

1) $2Z$ مثالية في $4Z$ ولنتحقق من ذلك

$2Z$ مثالية في $4Z$ لأن $2.4 = 4.2 = 8 \in 2Z$

2) $4Z$ تحوي $8Z$ ولنتحقق من ذلك وهي تحوي مضاعفات

$\Leftarrow$ $\frac{4Z}{8Z}$ مثالية في الحلقة الخارج $\frac{2Z}{8Z}$.

5) إن الحلقة $R = Z \oplus Z$ هي حلقة تامة لأن $Z$ حلقة تامة

خطأ لأن $R \ni (1,0), (0,1) \neq 0$

$(0,1).(1,0) = (0,0)$ $(1,0).(0,1) = (0,0)$

$R$ تحوي قواسم للصفر $\Leftarrow$ ليست تامة.

6) إن $3 + 6Z_{12}$ هو عنصر جامد في الحلقة $\frac{Z_{12}}{6Z_{12}}$

صح لأن

$(3)^2 + 6Z_{12} = 9^{\bmod 6} + 6Z_{12}$

$= 3 + 6Z_{12}$

$\Leftarrow$ $3 + 6Z_{12}$ هو عنصر جامد في الحلقة $Z_{12}/6Z_{12}$

7) إن المثالية $(3Z + 5Z)$ أعظمية في حلقة الأعداد الصحيحة $Z$

خطأ لأن $3Z + 5Z = gcd(3.5)Z = Z$

والمثالية الأعظمية لا يجب أن تساوي الحلقة نفسها.

8) إن المثالية $\langle 4 \rangle$ أولية في الحلقة $Z_{12}$.

خطأ لأن المثاليات الأعظمية في $Z_{12}$

هما $\langle 2 \rangle$ و $\langle 3 \rangle$

12
1 — 12 — 6
2 3 4

/ /

9) إن الحلقة $(Z_{18}, +, \cdot)$ حلقة موضعية خطأ لأن
الحلقة الموضعية هي من تملك مثالي أعظمي واحد فقط.
و $Z_{18}$ تملك أكثر من مثالي أعظمي واحد فهي تملك $\langle 2\rangle$، $\langle 3\rangle$.

$Z_{18}$: 1, 2, 3, 6, 9, 18

10) إذا كانت $B = 6Z$ ، $A = 2Z$ مثاليتين في $Z$ فإن $A:B = 3Z$ خطأ لأن.
بما أن $A, B$ مثاليتين في $Z$ و $Z$ تبديلية وواحدية فإنه يجب أن يتحقق أن $A:B = A$

$\Rightarrow A:B = 2Z \neq 3Z$

11) إذا كانت $R = Z_{30}$ فإن $J(R) = \langle 6\rangle$ خطأ لأن
$J(R)$ هو تقاطع المثاليات الأعظمية في $Z_{30}$

$J(R) = \langle 2\rangle \cap \langle 3\rangle \cap \langle 5\rangle$
$= lcm(2,3,5)$
$= 30 \bmod 30 = \langle 0\rangle \neq \langle 6\rangle$

30: 1, 2, 3, 5, 6, 15, 30

12) إذا كانت $A = \langle 6\rangle$ مثالية في حلقة الأعداد الصحيحة $Z$ فإن $rad\,A = \langle 3\rangle$ خطأ لأن. $rad\,A$ هو تقاطع المثاليات الأولية في $\langle 6\rangle$

$rad\,A = \langle 2\rangle \cap \langle 3\rangle$
$= lcm(2,3) = \langle 6\rangle \neq \langle 3\rangle$

6: 1, 2, 3, 6

13) إن الحدودية $2x+1 \in Z_4[x]$ هي حدودية ليس لها صفر في $Z_4$ صح لأن

$Z_4 = \{0,1,2,3\}$ , $f(x) = 2x+1$

$f(0) = 2(0)+1 = 1 \neq 0$
$f(1) = 2(1)+1 = 3 \neq 0$
$f(2) = 2(2)+1 = 5 \bmod 4 = 1 \neq 0$
$f(3) = 2(3)+1 = 7 \bmod 4 = 3 \neq 0$ $\Rightarrow$ حدودية ليس لها صفر في $Z_4$ كونها لا تملك أي صفر